

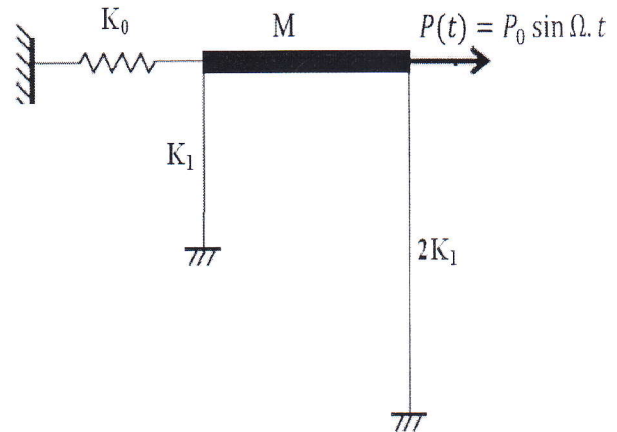


Examen (DDS)

Exercice N°1 (12 point) (Contrôle continu)

Le système mécanique de la figure ci-dessous est constitué un portique de plancher infiniment rigide, a une masse (M) est reliée à un ressort de rigidité (k) $k_0=5 \times 10^2$ KN/m. soumis à une force sinusoïdale (harmonique) avec une fréquence de 50 HZ et une amplitude de 40 KN appliquée au niveau du plancher. On mesure un déplacement maximal en tête de plancher de la colonne de 5mm. Sachant qu'à $t=0$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. ;
 $K_1=1.5 \times 10^6$ N/m.

- 1- En négligeant l'amortissement, calculer la fréquence propre f_0 du système.
- 2- Ecrire l'équation du mouvement et déterminer le déplacement à ($t = 3$ s).
- 3- En deuxième étape, on décide de placer un amortissement au sommet du portique ayant une constante d'amortissement $C=10^4$ kg/s, calculer le déplacement à l'instant ($t = 3$ s) et déterminer la force maximale transmise à la fondation.

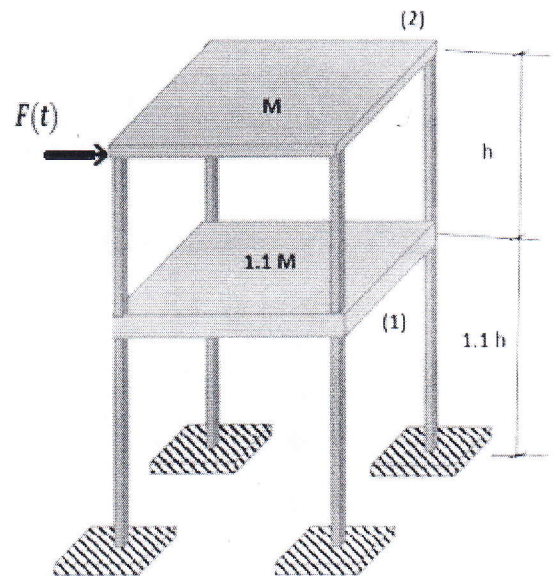


Exercice N°2 (08 point)

Le portique ci-dessous est en béton armé dont les caractéristiques sont :

- Le module de Young $E = 3 \cdot 10^4$ Mpa.
- La masse de l'étage est $M = 4$ t.
- La hauteur d'étage est $h = 4$ m.
- Les poteaux sont de sections carrées : 30×30 cm.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de système équivalent.
2. Déterminer la matrice de masse et de rigidité.
3. Déterminer la matrice modale.
4. Calculer les valeurs généralisées, en supposant que le chargement constant soudainement appliqué au deuxième étage $F(t) = \{0, 555\}$ N sans tenir compte de l'amortissement ($\zeta=0$).





1- Systèmes libre non amorties : نضام ديناميكي حر غير مخمد

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)$$

2- Systèmes libre amorties : نضام ديناميكي حر مخمد

- Système sur amorti $x(t) = (c_1 e^{\omega_s t} + c_2 e^{-\omega_s t}) e^{-\xi \omega t}$
- Système à amortissement critique $x(t) = (x_0 + (\omega x_0 + \dot{x}_0)t) e^{-\omega t}$
- Système sous amorti $x(t) = (A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t)) e^{-\xi \omega t}$

3- Systèmes non amortis à une force harmonique :

نضام ديناميكي غير مخمد يخضع الي قوة جيبيه

$$x_h(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \sin(\omega t)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad x(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \sin(\omega t)$$

- $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$; $W = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$
- $\Delta st = F_0/k$
- $FAD = \left| \frac{1}{1 - \beta^2} \right|$
- $|x_{max}| = \Delta st \cdot FAD$
- $|F_{trmax}| = F_0 \cdot FAD$

4- Systèmes amortie à une excitation harmonique :

نضام ديناميكي مخمد يخضع الي قوة جيبيه

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} [B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t)] + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

- $\xi_{cr} = \frac{c_{eq}}{c_{cr}}$
- $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$
- $\varphi = \arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$
- $|F_{trmax}| = F_0 \cdot \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$



Correction typique d'examen (DDS)

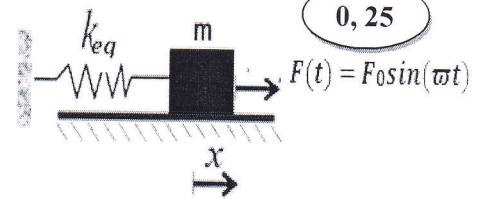
Solution exercice N°1: (12 point)

(03 P)

$M=?$; $k_0=5 \times 10^2$ KN/m = 0.5×10^6 N/m ; $k_1=1.5 \times 10^6$ N/m

1- Calculer la fréquence propre f_0 du système.

Ce système mécanique peut être modélisé par un système dynamique équivalent simple de la manière suivante :



0,25

- En peut être exprimée par :

$$k_{eq} = k_0 + k_1 + 2k_1 = 0.5 \times 10^6 + 1.5 \times 10^6 + 2 \times 1.5 \times 10^6 = 5 \times 10^6 \text{ N/m}$$

0,5

Ainsi, le système dynamique équivalent au système mécanique étudié est illustré sur la figure suivante :

- La pulsation de l'excitation est donnée par :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 314.16 \text{ rad/s}$$

0,25

- Le déplacement statique est :

$$\Delta st = F_0(P_0)/k_{eq} = 4 \times 10^4 / 5 \times 10^6 = 0.008 \text{ m}$$

0,5

- Le déplacement maximal de la masse est donné par :

$$|x_{max}| = \Delta st \cdot FAD = \Delta st \cdot \left| \frac{1}{1-\beta^2} \right| = \Delta st \cdot \left| \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2} \right| ; \Rightarrow \left| \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2} \right| = \frac{x_{max}}{\Delta st} \Rightarrow \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2} = -\frac{|x_{max}|}{\Delta st}$$

0,25

D'où :

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\frac{\Delta st}{|x_{max}|}}} \quad 0,25 \quad ; \quad \omega = \frac{314.16}{\sqrt{1+\frac{0.008}{0.005}}} = 194.833 \text{ rad/s.} \quad 0,5$$

- Le facteur d'amplification dynamique est exprimé par :

$$FAD = \left| \frac{1}{1-\beta^2} \right| = \frac{1}{1-1.61^2} = 0.52 ; \text{ et } \beta = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{314.16}{194.833} = 1.61 ;$$

Et enfin :

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{194.833}{2\pi} = 31 \text{ HZ} \quad 0,5$$

(03 P)

2- L'équation horaire du mouvement :

- Il s'agit d'un système à 1 DDLD $C = 0$ et $F(t) = 40 \sin(50t) \text{ KN} \neq 0$.

0,25

- L'équation de mouvement est : $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t)$

0,25

- La solution générale est donnée par :

$$x(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \sin(\omega t).$$

- La vitesse se déduit par dérivation de cette équation :

$$\dot{x}(t) = B_1 \omega \cos(\omega t) - B_2 \omega \sin(\omega t) + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \omega \cos(\omega t)$$

0,25

D'après les conditions initiales : à $t=0$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

$$x(0) = 0 \Rightarrow B_2 = 0.$$

0,5

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \beta = -\frac{40000}{5 \times 10^6} \cdot \frac{1}{1-1.61^2} \times 1.61 = 0.008.$$

0,5

$$\Rightarrow A = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{40000}{5 \times 10^6} \cdot \frac{1}{1-1.61^2} = -0.0050.$$

0,5

D'où, l'équation horaire est : $x(t) = 0.008 \sin(194.833t) - 0.0050 \sin(194.833t)$.

0,25

Le déplacement à $t=3s$ est : $x(3) = 0.008 \sin(194.833(3)) - 0.0050 \sin(194.833(3))$.

Le déplacement à $t=3s$ est : $x(3) = -2.3 \times 10^{-3} \text{ m}$.

0,5



(06 P)

3- Déterminer la force maximale transmise à la fondation.

❖ Il s'agit d'un système à 1 DDLD $C \neq 0$ et $F(t) = 40 \sin(50t) \text{ KN} \neq 0$. 0,25

❖ L'équation de mouvement est :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad 0,25$$

❖ La solution générale est donnée par :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t)] + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

La vitesse instantanée est donnée par :

$$\dot{x}(t) = e^{-\xi\omega t} [- (B_1 \omega_d + B_2 \xi \omega) \sin(\omega_d t) + (B_2 \omega_d - B_1 \xi \omega) \cos(\omega_d t)] + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1-\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Les constantes B_1 et B_2 sont déterminés à partir des conditions initiales :

$$\bullet \quad x(0) = 0 \Rightarrow B_2 + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1-\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\varphi)$$

$$\bullet \quad \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B_1 \omega_d - B_2 \xi \omega + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1-\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \omega \cos(\varphi).$$

En déduisant $\sin(\varphi)$ et $\cos(\varphi)$, on trouve :

$$x(0) = 0 \Rightarrow B_2 + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{2\xi\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0; \quad 0,25$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B_1 \omega_d - B_2 \xi \omega + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{(1-\beta^2)\omega}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0; \quad 0,25$$

D'où :

$$B_2 = - \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = - \frac{40000}{5 \times 10^6} \cdot \frac{2 \times 0.195 \times 1.61}{(1-1.61^2)^2 + (2 \times 0.195 \times 1.61)^2} = -1.98 \cdot 10^{-3} \quad 0,5$$

$$B_1 = - \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \left[\frac{2\xi^2\beta + (1-\beta^2)\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \frac{\omega}{\omega_d} = - \frac{40000}{5 \times 10^6} \left[\frac{2 \times 0.195^2 \times 1.61 + (1-1.61^2) \times 1.61}{(1-1.61^2)^2 + (2 \times 0.195 \times 1.61)^2} \right] \frac{194.833}{191.09} = 11.63 \cdot 10^{-3} \quad 0,5$$

La masse de système : $\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k_{eq}}{m} \Rightarrow m = \frac{k_{eq}}{\omega^2} = \frac{5 \cdot 10^6}{(194.833)^2} = 131.71 \text{ kg} \quad 0,5$

La fraction d'amortissement : $\xi_{cr} = \frac{c_{eq}}{c_{cr}} = \frac{c_{eq}}{2m\omega} = \frac{10^4}{2 \times 131.71 \times 194.833} = 0.195 \quad 0,5$

La pulsation amortie : $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 194.833 \sqrt{1 - 0.195^2} = 191.09 \text{ rad/s} \quad 0,5$

L'angle de phase : $\varphi = \arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) = \arctg\left(\frac{2 \times 0.195 \times 1.61}{1-1.61^2}\right) = -0.39 \quad 0,5$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t)] + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1-\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(3) = e^{-38 \times 3} [0.01163 \sin(191.09 \times 3) - 3 \times 10^{-3} \cos(191.09 \times 3)] + 0.165 \sin(314.16 \times 3 - 0.39) \quad 0,75$$



Force transmise à la fondation :

$$|F_{trmax}| = F_0 \cdot \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} / 2 = 40 \times 10^3 \frac{\sqrt{1+(2 \times 0.195 \times 1.61)^2}}{\sqrt{(1-1.61^2)^2+(2 \times 0.195 \times 1.61)^2}} / 2$$

$$= 23.27 \times 10^3 \text{ N}$$

01

Solution exercice N°2: (08 point)

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2.$$

$$1 \text{ T} = 10^3 \text{ kg}.$$

(1,5 P)

1- Déterminer l'équation différentielle du mouvement de système équivalent.

a- Le modèle équivalent de système a étudiée :

On suppose que les masses(m) deux est concentrées au centre de gravité du plancher, ainsi le déplacement des 2 planchers, sera caractérisé par le déplacement (X) de son centre de gravité qui représente 2 degré de liberté, donc comportant 2 masses concentrées.

Selon la 2^{ème} loi de Newton en dynamique on trouve :

• Considérons la masse (m₁) avec le déplacement (x₁) et appliquons la relation fondamentale de la dynamique :

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \dots \dots \dots \text{eq n}^\circ 1.$$

• Considérons la masse (m₂) avec le déplacement (x₂) et appliquons la relation fondamentale de la dynamique :

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \dots \dots \dots \text{eq n}^\circ 2.$$

Ce qui donne, après arrangement des équations, ou bien sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$[m] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{0\}$$

(1,5 P)

2- Déterminer la matrice de masse et de rigidité.

a- Matrice de masse :

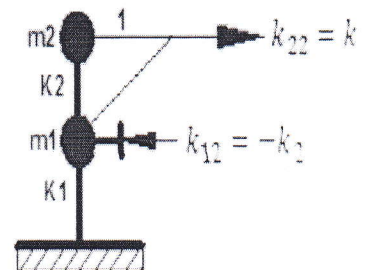
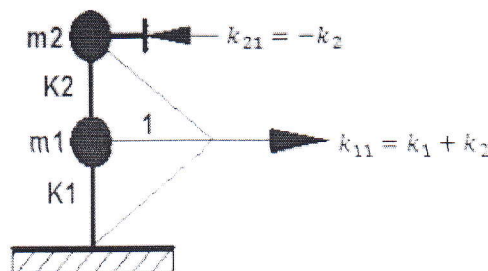
Pour cette structure, la matrice de masse est diagonale et d'ordre 2x2

m₁=1,1M = 1,1x 4= 4,4 t = 4400 Kg, et m₂=1M = 1x 4= 4 t = 4000 Kg.

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4400 & 0 \\ 0 & 4000 \end{bmatrix} \text{ Kg}.$$

b- Matrice de rigidité :

On voit bien que lorsqu'on impose un déplacement unitaire de deux (2) DDLD, on obtient les éléments de la colonne i de la matrice de rigidité, ainsi, la forme de la matrice [k] pour cette structure est :



$$k_1 = 4 * \frac{12EI}{(1.1h)^3}; \quad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0,3)^4}{12} = 0,000675 \text{ m}^4$$

$$k_1 = 4 * \frac{12 * 3 * 10^{10} * 0.000675}{(4.4)^3}; \quad k_1 = 11.41 * 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

$$k_2 = 4 * \frac{12EI}{(1.1h)^3}; \quad k_2 = 4 * \frac{12 * 3 * 10^{10} * 0.000675}{(4)^3}; \quad k_2 = 15.19 * 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

0,25



(3, 5 P)

3- Déterminer la matrice modale.

a- Pulsations propres :

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.6 & -15.19 \\ -15.19 & 15.19 \end{bmatrix} * 10^6 \frac{N}{m}; \quad (0, 5)$$

$$|[m] - \omega^2[k]| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 26.6 & -15.19 \\ -15.19 & 15.19 \end{bmatrix} * 10^6 - \omega^2 \begin{bmatrix} 4.4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} * 10^3 \right| = 0$$

Les valeurs propres sont les racines de cette matrice :

$$\left| \begin{bmatrix} 26.6 * 10^6 - \omega^2 4.4 * 10^3 & -15.19 * 10^6 \\ -15.19 * 10^6 & 15.19 * 10^6 - \omega^2 4 * 10^3 \end{bmatrix} \right| = 0;$$

$$(26.6 * 10^6 - \omega^2 4400) * (15.19 * 10^6 - \omega^2 4000) - (15.19 * 10^6)^2 = 0;$$

$$17.6 * 10^6 \omega^4 - 173.236 * 10^9 \omega^2 + 173.32 * 10^{12} = 0;$$

Pour trouver les racines de cette équation, on pose : $\omega^2 = \lambda$; $\omega^4 = (\omega^2)^2 = (\lambda)^2$, et on aura une équation d'ordre 2 :

$$17.6 * 10^6 \lambda^2 - 173.236 * 10^9 \lambda + 173.32 * 10^{12} = 0 \quad (0,25)$$

Donc les racines sont :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-173.236 * 10^9)^2 - 4(17.6 * 10^6)(173.32 * 10^{12}) = 17,82 * 10^{12};$$

$$\Delta = 17,82 * 10^{12} \geq 0; \sqrt{\Delta} = \sqrt{17,82 * 10^{12}} = 1.33 * 10^{11}. \quad (0,25)$$

$$\bullet \lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{173.236 * 10^9 - \sqrt{17,82 * 10^{12}}}{2(-1)}; \quad \lambda_1 = 1142.89 \quad (0,25)$$

$$\bullet \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{173.236 * 10^9 + \sqrt{17,82 * 10^{12}}}{2(-1)}; \quad \lambda_2 = 8711.08 \quad (0,25)$$

$$\omega^2 = \lambda \Rightarrow \sqrt{\omega^2} = \sqrt{\lambda}$$

Dont les racines sont :

$$\bullet \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{1142.89} \Rightarrow \omega = 33.80 \frac{Rad}{s}. \quad (0,25)$$

$$\bullet \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{8711.08} \Rightarrow \omega = 93.33 \frac{Rad}{s}. \quad (0,25)$$

Dont les racines sont :

$$\omega_1 = 33.80 \frac{Rad}{s} < \omega_2 = 93.33 \frac{Rad}{s} \quad (0,25)$$

b- Vecteurs propres (modes propres) :

Les vecteurs propres sont déduits à partir de : $[[k] - \omega_i^2[m]] \{A\} = \{0\}$.

$$\bullet \text{ Pour } \omega_1 = 33.80 \frac{Rad}{s}, \{A^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_1 \end{Bmatrix}$$

$$[[k] - \omega_1^2[m]] \{A^1\} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 26.6 & -15.19 \\ -15.19 & 15.19 \end{bmatrix} * 10^6 - \omega_1^2 \begin{bmatrix} 4.4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} * 10^3 \right| \begin{Bmatrix} 1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

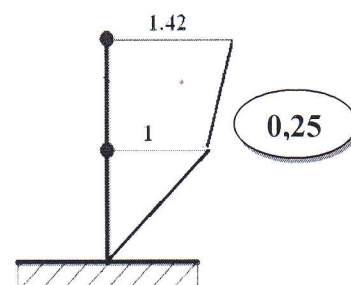
$$\Rightarrow 26.6 * 10^6 - 5.026 * 10^6 = 15.19 * 10^6 y_1$$

$$\Rightarrow y_1 = 1.42 \quad (0,25)$$

Alors, le premier vecteur propre est :

$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.42 \end{Bmatrix} \quad (0,25)$$

Ce mode de vibration peut être illustré graphiquement :





- Pour $\omega_2 = 93.33 \frac{\text{Rad}}{\text{s}}$. $\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$

$$[[k] - \omega_2^2 [m]] \{A^2\} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 26.6 & -15.19 \\ -15.19 & 15.19 \end{bmatrix} * 10^6 - \omega_2^2 \begin{bmatrix} 4.4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} * 10^3 \begin{Bmatrix} 1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow 26.6 * 10^6 - 38.32 * 10^6 = 15.19 * 10^6 y_1$$

$$\Rightarrow y_1 = -0.77$$

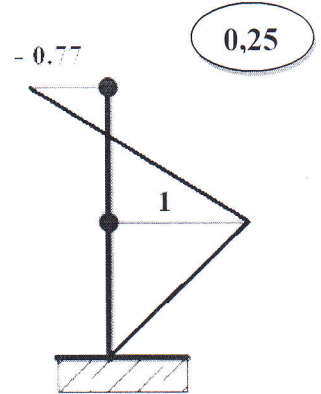
0,25

Alors, le deuxième vecteur propre est :

$$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.77 \end{Bmatrix}$$

0,25

Ce mode de vibration peut être illustré graphiquement :



Donc la matrice modale est tout simplement l'assemblage en colonnes des vecteurs propres.

$$[A] = [A^{(1)} A^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.42 & -0.77 \end{bmatrix}$$

0,25

(1, 5 P)

4- Calcul des valeurs généralisées

a- Masses généralisées :

$$M_i = \{A^{(i)}\}^T [m] \{A^{(i)}\}$$

- $M_1 = \{1, 1.42\} \begin{bmatrix} 4.4 * 10^3 & 0 \\ 0 & 4 * 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.42 \end{Bmatrix} = 12.46 * 10^3 \text{ kg}$

0,25

- $M_2 = \{1, -0.77\} \begin{bmatrix} 4.4 * 10^3 & 0 \\ 0 & 4 * 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.77 \end{Bmatrix} = 6.77 * 10^3 \text{ kg}$

0,25

b- Coefficients de rigidité généralisés :

$$K_i = \{A^{(i)}\}^T [k] \{A^{(i)}\}$$

- $K_1 = \{1, 1.42\} \begin{bmatrix} 26.6 & -15.19 \\ -15.19 & 15.19 \end{bmatrix} * 10^6 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.42 \end{Bmatrix} = 14.07 * 10^6 \text{ N/m}$

0,25

- $K_2 = \{1, -0.77\} \begin{bmatrix} 26.6 & -15.19 \\ -15.19 & 15.19 \end{bmatrix} * 10^6 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.77 \end{Bmatrix} = 58.98 \cong 60 * 10^6 \text{ N/m}$

0,25

c- Charge généralisée :

$$P_i(t) = \{A^{(i)}\}^T \{F(t)\}$$

- $P_1 = \{1, 1.42\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 555 \end{Bmatrix} = 788.1 \text{ N}$

0,25

- $P_2 = \{1, -0.77\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 555 \end{Bmatrix} = -427.35 \text{ N}$

0,25